ΥΛΗ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
«ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ»

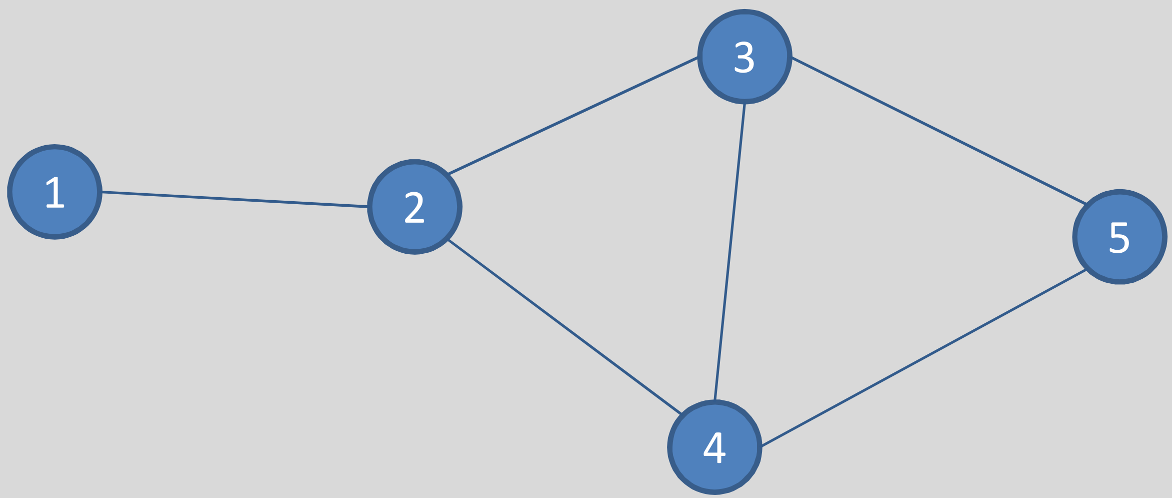
ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2013-2014

Προβλήματα αριστοποίησης, μορφοποίηση προβλημάτων. Εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό, γραφική επίλυση. Μορφή και ιδιότητες της άριστης λύσης. Κανονική (τυπική) μορφή προγράμματος γραμμικού προγραμματισμού. Επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο Simplex. Δίκτυα, στοιχειώδη προβλήματα διαδρομής, εύρεση βέλτιστης διαδρομής με την προς τα εμπρός και με την προς τα πίσω μέθοδο.

Ακολουθεί ένα παράδειγμα επίλυσης προβλήματος στοιχειώδους διαδρομής με την προς τα πίσω και προς τα εμπρός μέθοδο.

ΔΙΚΤΥΑ

Δίκτυο: ένα διάγραμμα που αποτελείται από κόμβους και ακμές (ή κλάδους ή τόξα). Κάθε ακμή ορίζεται από δύο κόμβους. Σε κάθε κόμβο μπορούν να καταλήγουν περισσότερες από μια ακμές, όπως επίσης και να ξεκινούν από ένα κόμβο περισσότερες από μια ακμές. Σε ορισμένες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει και ο προσανατολισμός της ακμής. Π.χ.:



Στοιχειώδη προβλήματα διαδρομής

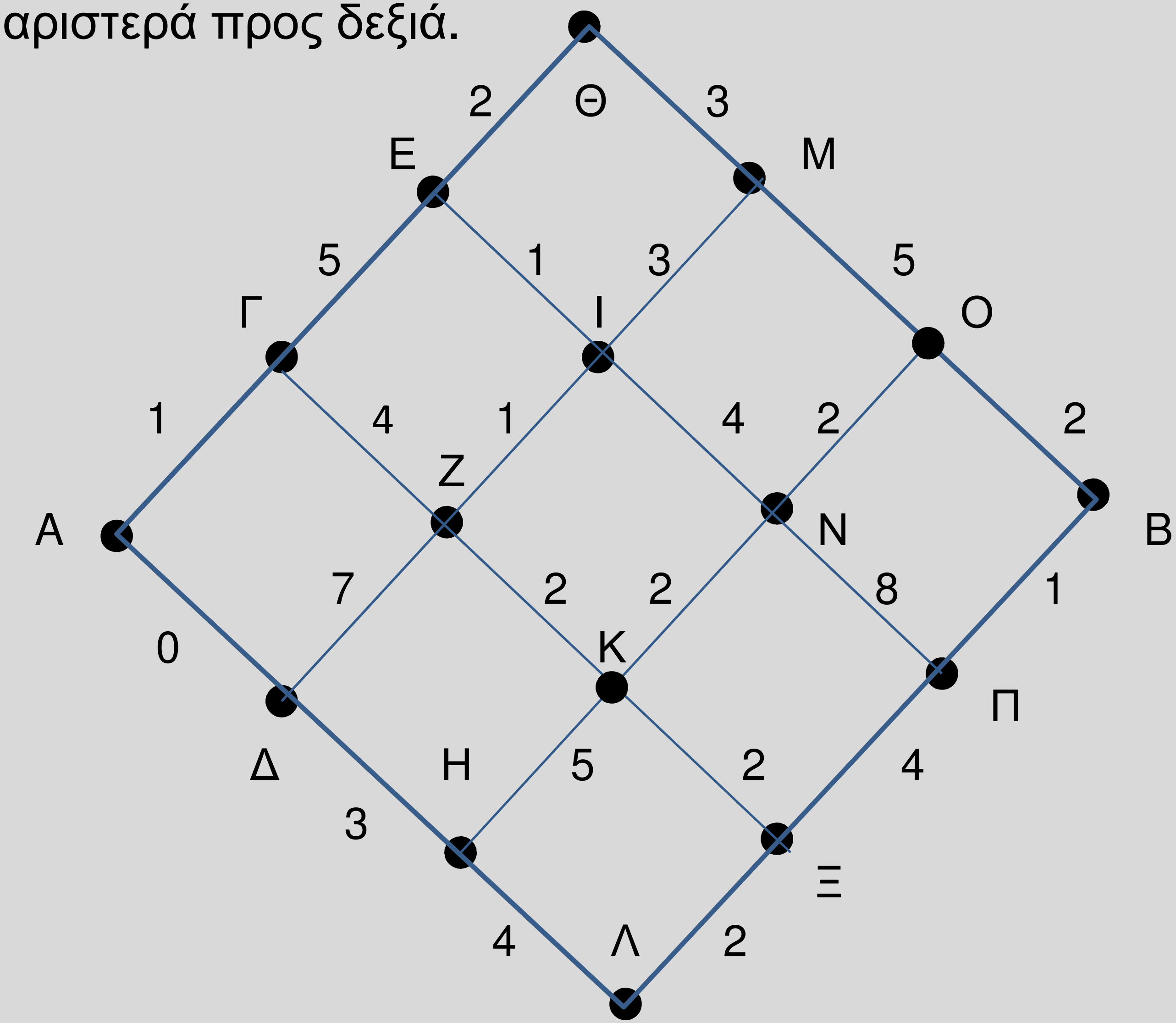
Το πρόβλημα: ζητείται να βρεθεί η βέλτιστη διαδρομή σε κάποιο δικτυωτό.

Αντιμετώπιση:

- Ορισμός βέλτιστης συνάρτησης
- Διατύπωση επαναληπτικής σχέσης
- Οριακές συνθήκες

Αρχή της βελτιστοποίησης: όποια απόφαση κι αν πάρουμε αρχικώς, οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν βέλτιστη πολιτική.

<u>Παράδειγμα</u>: Θέλουμε να πάμε από την πόλη Α στην πόλη Β. Αν όλοι οι πιθανοί δρόμοι με τις χιλιομετρικές αποστάσεις απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα, να βρεθεί η ελάχιστη διαδρομή. Η φορά είναι πάντα από αριστερά προς δεξιά.



Ορίζουμε

$f(x,y) \equiv$ η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του κόμβου (x,y) και του τελικού κόμβου B = (6,0) (το A είναι το (0,0)).

Αρχή της βελτιστοποίησης: όποια απόφαση κι αν πάρουμε αρχικώς, οι υπόλοιπες αποφάσεις πρέπει να αποτελούν βέλτιστη πολιτική.

Στο σημείο Α: $f(0,0)= \min \{1+f(1,1),0+f(1,-1)\}$

Στο σημείο Α: $f(0,0)= \min \{1+f(1,1),0+f(1,-1)\}$

Στο σημείο Γ: $f(1,1)= \min \{5+f(2,2),4+f(2,0)\}$

Στο σημείο Α: $f(0,0)= \min \{1+f(1,1),0+f(1,-1)\}$

Στο σημείο Γ: $f(1,1)= \min \{5+f(2,2),4+f(2,0)\}$

Στο σημείο Δ: $f(1,-1)= \min \{7+f(2,0),3+f(2,-2)\}$

Στο σημείο Α: $f(0,0)= \min \{1+f(1,1),0+f(1,-1)\}$

Στο σημείο Γ: $f(1,1)= \min \{5+f(2,2),4+f(2,0)\}$

Στο σημείο Δ: $f(1,-1)= \min \{7+f(2,0),3+f(2,-2)\}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

Άρα όλα καταλήγουν στον υπολογισμό των $f(5,1)$ και $f(5,2)$.

Επομένως:

Για x=5

f(5,1)=2,
f(5,-1)=1.

Για x=4

f(4,2)=5+f(5,1)=7
f(4,0)= min{2+f(5,1),8+f(5,-1)}={4,9}=4
f(4,-2)=4+f(5,-1)=5

Για x=3

f(3,3)=3+f(4,2)=10
f(3,1)= min{3+f(4,2),4+f(4,0)}={10,8}=8
f(3,-1)= min{2+f(4,0),2+f(4,-2)}={6,7}=6
f(3,-3)=2+f(4,-2)=7

Για x=2

f(2,2)= min{2+f(3,3),1+f(3,1)}={12,9}=9
f(2,0)= min{1+f(3,1),2+f(3,-1)}={9,8}=8
f(2,-2)=min{5+f(3,-1),4+f(3,-3)}={11,11}=11

Για x=1

f(1,1)= min{5+f(2,2),4+f(2,0)}={14,12}=12
f(1,-1)= min{7+f(2,0),3+f(2,-2)}={15,14}=14

Για x=0

f(0,0)= min{1+f(1,1),0+f(1,-1)}={13,14}=13.

Άρα η ελάχιστη διαδρομή από το A στο B έχει τιμή 13 και είναι:

$(0,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (2,0) \rightarrow (3,-1) \rightarrow (4,0) \rightarrow (5,1) \rightarrow (6,0)$

Έστω $\alpha(x,y)$ η απόσταση μεταξύ (x,y) και $(x+1,y+1)$ και $\delta(x,y)$ η απόσταση μεταξύ (x,y) και $(x+1,y-1)$.

Στα προηγούμενα χρησιμοποιήσαμε ουσιαστικά την επαναληπτική σχέση

$$f(x,y) = \min \{\alpha(x,y)+f(x+1,y+1),\ \delta(x,y)+f(x+1,y-1)\}$$

και την οριακή συνθήκη $f(6,0)=0$.

Η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε ονομάζεται προς τα πίσω μέθοδος.

Το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί και με την προς τα εμπρός μέθοδο:

ορίζουμε βέλτιστη συνάρτηση την

$f(x,y) \equiv$ η τιμή της ελάχιστης διαδρομής μεταξύ του κόμβου (0,0) και του κόμβου (x,y) .

Η επαναληπτική σχέση θα είναι

$$f(x,y) = \min \{\alpha(x-1,y-1)+f(x-1,y-1),\ \delta(x-1,y+1)+f(x-1,y+1)\}$$

με οριακή συνθήκη $f(0,0)=0$.

Έχουμε:

Για x=1

f(1,1)= 1+f(0,0)=1
f(1,-1)=0+f(0,0)=0

Για x=2

f(2,2)= 5+f(1,1)=6
f(2,0)= min{7+f(1,-1),4+f(1,1)}={7,5}=5
f(2,-2)=3+f(1,-1)=3

Για x=3

f(3,3)=2+f(2,2)=8
f(3,1)= min{1+f(2,2),1+f(2,0)}={7,6}=6
f(3,-1)= min{2+f(2,0),5+f(2,-2)}={7,8}=7
f(3,-3)=4+f(2,-2)=7

Για x=4

f(4,2)= min{3+f(3,3),3+f(3,1)}={11,9}=9
f(4,0)= min{4+f(3,1),2+f(3,-1)}={10,9}=9
f(4,-2)=min{2+f(3,-1),2+f(3,-3)}={9,9}=9

Για x=5

f(5,1)= min{5+f(4,2),2+f(4,0)}={14,11}=11
f(5,-1)= min{8+f(4,0),4+f(4,-2)}={17,13}=13

Για x=6

f(6,0)= min{2+f(5,1),1+f(5,-1)}={13,14}=13.

Άρα η ελάχιστη διαδρομή από το A στο B έχει τιμή 13 και είναι:

(0,0) $\longrightarrow$ (1,1) $\longrightarrow$ (2,0) $\longrightarrow$ (3,-1) $\longrightarrow$ (4,0) $\longrightarrow$ (5,1) $\longrightarrow$ (6,0)